MA2 – „písemná" přednáška „za" 30. 3. 2020

V minulé „přednášce" – hlavní pojmy byly

1) funkce diferencovatelná v bodě, totální diferenciál;

2) derivace funkce ve směru.

Připomeňme definice:

1. $f: M \subset R^n \to R$, X_0 je vnitřní bod M; existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, $i = 1, \dots n$.

Říkáme, že f je diferencovatelná v bodě X_0, když platí:

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + \omega(X - X_0), \text{ kde}$$

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\omega(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0.$$

Výraz $\nabla f(X_0)(X - X_0) = df(X_0)(X - X_0)$ je totální diferenciál funkce f v bodě X_0.

„Rozepsáno": $df(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)(x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)(x_n - x_n^0)$

$(X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0))$

tj. $$df(X_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)(x_i - x_i^0)$$

a často se značí $x_i - x_i^0 = dx_i$, pak $df(X_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Pak v okolí bodu X_0 je

$$f(X) \cong \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)(x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)(x_n - x_n^0)$$

– lineární aproximace funkce („chyba" aproximace – $\omega(X - X_0)$)

A co nebylo zdůrazněno při definování diferencovatelnosti fce minule (omlouvám se):

Pro $n=2$:

Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě (x_0,y_0), pak rovina, jejíž rovnice je

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

se nazývá tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

A odtud: vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$ je normálový vektor tečné roviny v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

(často užitečný vektor ve fyzice – „normála" k ploše, dané grafem nějaké funkce)

A v obecném případě $n>1$

Je-li $f: M\subset R^n \to R$ diferencovatelná v bodě $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$, pak množina bodů $(x_1,\dots,x_n,z)\in R^{n+1}$, pro které platí

$$z = f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,\dots,x_n^0)(x_1-x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0,\dots,x_n^0)(x_n-x_n^0)$$

(také zapsáno: $z = f(X_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)(x_i-x_i^0)$)

se nazývá tečná nadrovina grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]\in R^{n+1}$

2. Derivace funkce f v bodě X_0 ve směru vektoru $\vec{a}$ ($\|\vec{a}\|=1$):

$$\frac{df}{d\vec{a}}(X_0) = \frac{d}{dt} f(X_0+t\vec{a})\Big|_{t=0},$$

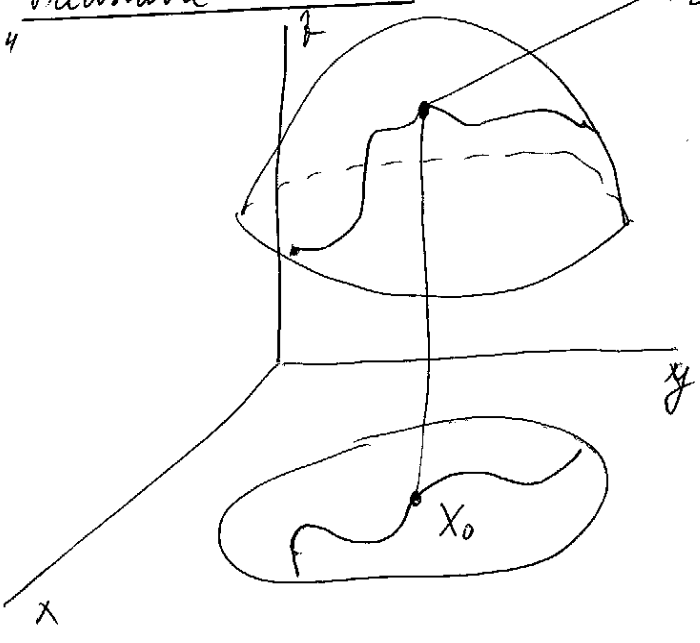
a je-li funkce f diferencovatelná v bodě X_0, pak

$$\frac{df}{d\vec{a}}(X_0) = \nabla f(X_0).\vec{a} \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0).a_i\right)$$

A „význam" derivace f ve směru $\vec{a}$ – udává rychlost změny „řezu" grafu funkce f rovinou (pro $n=2$) kolmou k rovině $z=0$ se stopou „$X = X_0 + t\vec{a}$, $t \in R$" a také směrnici tečny k tomuto „řezu" (tj. k fci jedné proměnné)

A dále: Zkusíme najít rychlost změny funkce po jiné, než „přímé" cestě „po kopci" (tj. na grafu fce f):

„Představa" – $n=2$



$[X_0, f(X_0)]$

tj. rychlost „změny f v bodě X_0, tj. změny „kopce" v bodě $[X_0, f(X_0)]$?

„cestu" v D_f lze popsat vektorovou funkcí (pro $n=2$) $\vec{\varphi}(t) = (x(t), y(t))$, pak „cesta" na grafu f je

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$$

a rychlost na cestě „grafem" v bodě $t=t_0$: $\vec{r}\,'(t_0) = \left(x'(t_0), y'(t_0), \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=t_0}\right)$

- tedy, zde nám „chybí" rychlost změny z-ové souřadnice „cesty", tj. $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=t_0}$:

- předpokládejme, že funkce f je diferencovatelná v bodě $X(t_0)=X_0$, $X(t_0)=(x(t_0), y(t_0))$ (a budeme značit i $X(t)=(x(t), y(t))$), a nechť existuje $X'(t_0)=(x'(t_0), y'(t_0))$, pak:

$$\underline{\frac{d}{dt} f(X(t))\Big|_{t=t_0}} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(X(t))-f(X(t_0))}{t-t_0} \overset{\text{neboť (existuje } df(X_0)=df(X(t_0)))}{=}$$

$$= \lim_{t\to t_0}\left(\frac{\nabla f(X(t_0))(X(t)-X(t_0))}{t-t_0} + \frac{\omega(X(t)-X(t_0))}{t-t_0}\right) =$$

$$= \underline{\nabla f(X(t_0))\cdot X'(t_0)}$$

neboť (i) $\lim_{t\to t_0} \frac{X(t)-X(t_0)}{t-t_0} = X'(t_0)$ (derivace vektorové funkce)

a (ii) $\lim_{t\to t_0} \frac{\omega(X(t)-X(t_0))}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\left(\underbrace{\frac{\omega(X(t)-X(t_0))}{\|X(t)-X(t_0)\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|X(t)-X(t_0)\|}{t-t_0}}_{\text{„omezená fce" (viz (iii))}}\right) = 0$

(iii) $\lim_{t\to t_0\pm} \frac{\|X(t)-X(t_0)\|}{t-t_0} =$

$$= \lim_{t\to t_0\pm} \sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2} \cdot \frac{|t-t_0|}{t-t_0} =$$

$$= \sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2} \cdot \operatorname{sgn}(t-t_0) = \pm \|X'(t_0)\|, \quad (\in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow \frac{\|X(t)-X(t_0)\|}{t-t_0}$ je funkce omezená v „nějakém" $P(t_0)$,

„Naše" výpočet derivace funkce $f(X(t))$ pro $t=t_0$ nezávisel „na počtu proměnných funkce f – tedy (asi) platí obecně:
(a bez „asi")

<u>Věta</u> (o derivaci složené funkce více proměnných – pro případ, že vnější funkce je funkce $f: M\subset R^n \to R$, a vnitřní funkce je vektorová funkce jedné proměnné, tj. $X(t): U(t_0) \to M \subset R^n$)

1) f je diferencovatelná v bodě $X_0 \in M \subset R^n$, $X_0 \in M^0$;
2) $X = X(t)$ má derivaci $X'(t_0)$, $X(t): U(t_0) \to M$, $X(t_0)=X_0$;

pak existuje
$$\left.\frac{d}{dt} f(X(t))\right|_{t=t_0} = \nabla f(X(t_0))\cdot X'(t_0) \quad (*)$$

nebo „rozepsáno":
$$\left.\frac{d}{dt} f(X(t))\right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t_0))\cdot x_i'(t_0)$$
$$(**) \qquad \left(= \frac{\partial f}{\partial x_1}(X(t_0))\cdot x_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X(t_0))\cdot x_2'(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X(t_0))\cdot x_n'(t_0)\right)$$

Tento vzorec se nazývá „v podobě (**)" „řetízkové pravidlo".
A ještě – všimněte si, že vzorec pro derivování složené funkce $f(X(t))$ má „v podobě" (*) opět charakter návodu pro derivování „složené" funkce jedné proměnné (ZS) –
– opět („derivace fce vnější – zastoupená gradientem, tj. vektorem všech derivací) • (vektor derivací fce vnitřní)
– „<u>důsledek" „skvěle" vymyšleného značení</u> (a pojmů) –
– $\nabla f(X(t_0)) \bullet X'(t_0)$ – gradient f, derivace vektorové fce, skalární součin

Poznámka: Předpoklady věty jsou splněny (viz minulá „přednáška", když f má spojité všechny parciální derivace 1. řádu v bodě $X_0 = X(t_0)$;

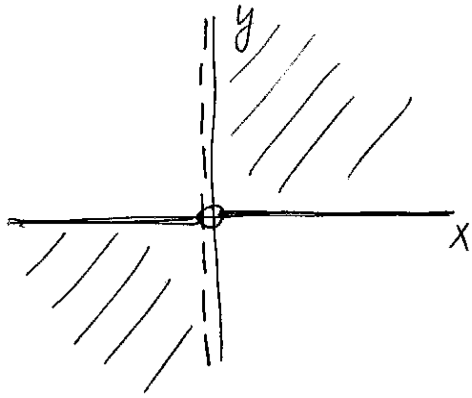
Tedy, dobré budou funkce, které budou mít spojité parciální derivace 1. řádu ve všech vnitřních bodech z Df (v takových jsme parciální derivace definovali) – je „dobré" označení množiny všech bodů vnitřních množiny M – značíme

M^0 – „vnitřek" množiny M

A u „nás" bude většinou splněno, že f má spojité derivace v Df^0 1. řádu – budeme značit: $f \in C^{(1)}(Df^0)$

Příklad 1. $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y} + \frac{y}{x}$ a $(x(t), y(t)) = (t^2, \ln t) = X(t)$
(„technický")

1) $f(x,y)$ je definována pro $x \neq 0$
a $x \cdot y \geq 0$



pro $(x,y) \in Df^0$ (tj. $y \neq 0$)

je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y - \frac{y}{x^2}$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x + \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v $Df^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f je diferencovatelná v Df^0 $(f \in C^{(1)}(Df^0))$

2) $X(t) \in Df^0$ pro $t \in (1, +\infty)$, tj. $X'(t) = (2t, \frac{1}{t})$ v $(1, +\infty)$

A pak $\underline{f(X(t)) = g(t) = \sqrt{t^2 \ln t} + \frac{\ln t}{t^2}}$ v $(1,+\infty)$;

můžeme derivovat „po staru" – jako funkci jedné proměnné:

$$\underline{g'(t)} = \frac{1}{2\sqrt{t^2 \ln t}} \left(2t \ln t + t\right) + \frac{\frac{1}{t} \cdot t^2 - \ln t \cdot 2t}{t^4} =$$

$$(t>0) \quad = \underline{\frac{1}{2\sqrt{\ln t}} \left(2\ln t + 1\right) + \frac{1 - 2\ln t}{t^3}, \quad t \in (1,+\infty)}$$

<u>A zkusme řetízkové pravidlo</u> – sice je derivování tímto způsobem jednodušší (ale musíme zase znát „těžší" pravidlo), ale jak uvidíme, řetízkové pravidlo je užitečné i v obecné podobě.

Tedy řetízkové pravidlo lze použít, neboť $f \in C^1(\mathcal{D}f^0)$:

„Skládáme parciální derivace f z 1) a derivace $(x'(t), y'(t))$ z (2):

$$\underline{g'(t)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \underset{(2)}{=}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, \ln t) \cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \ln t) \cdot \frac{1}{t} \underset{(1)}{=}$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{t^2 \ln t}} \cdot \ln t - \frac{\ln t}{(t^2)^2}\right) \cdot 2t + \left(\frac{1}{2\sqrt{t^2 \ln t}} \cdot t^2 + \frac{1}{t^2}\right) \cdot \frac{1}{t} =$$

$$= \underline{\frac{1}{2\sqrt{t^2 \ln t}} \left(2t \ln t + t\right) + \frac{1 - 2\ln t}{t^3}, \quad t \in (1,+\infty)}$$

tedy – naštěstí stejný výsledek!

Příklad 2.

A nyní „hezký" příklad užití „řetízkového" pravidla:
(zmíněná nahoře "užitečnost řetízkového pravidla – vnější funkce zde bude „obecná")

Mějme $f(X)$, $X \subset \mathcal{D}f^0 \subset R^n$; pak nechť známe
$X = X(t)$ vrstevnici (tj. ekvipotenciální křivku):

tj. $\underline{f(X(t)) = k}$ $(k \in \mathcal{H}f;\ t \in (a,b))$, $f \in C^1(\mathcal{D}f^0)$;
(k – konstanta)

Pak ale $\frac{d}{dt} f(X(t)) = 0$ v (a,b), ale také

platí $\frac{d}{dt} f(X(t)) = \nabla f(X(t)) . X'(t)$

$\Longrightarrow$ „snadno" a „obecně"

$$\underbrace{\nabla f(X(t))}_{\text{gradient } f \text{ v bodě } X(t)} \bullet \underbrace{X'(t)}_{\text{tečný vektor k vrstevnici v bodě } X(t)} = 0 \quad !$$

Tak snadno se dá ukázat, že pro $\nabla f(X(t)) \neq \vec{o}$, a $X'(t) \neq \vec{o}$ platí, že $\underline{\nabla f(X(t)) \perp X'(t)}$

(vektory $\nabla f(X(t))$ a $X'(t)$ jsou navzájem ortogonální – v „matematičtině" se říká)

(tj. gradient míří "kolmo" k vrstevnici – souhlasí s tím, že ukazuje směr „největší" změny fce f)

Příklad 3 1) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (tj. vzdálenost bodu $X[x,y,z]$ od počátku)

2) $X = X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ – „trajektorie" v R^3

nechť ex. $X'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, $t \in (a,b)$

a $X(t) \neq \vec{o}$ v (a,b)

složená funkce $g(t) = f(X(t)) = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}$

(udává vzdálenost bodu $X(t)$ trajektorie od počátku)

a díky předpokladům o $X(t)$ a $f(X) \in C^1(R^3 \setminus \{0\})$:

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}} \left(2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + 2z(t).z'(t)\right) =$$

$$= \frac{X(t)}{\|X(t)\|} \cdot X'(t)$$

(spočítáno „po staru")

a „nové" - řetízkové pravidlo: $X = (x, y, z)$

$$\nabla f(X) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (x, y, z) = \frac{1}{\|X\|} \cdot X$$

a $X'(t) = (x(t), y(t), z(t))' = (x'(t), y'(t), z'(t))$,

tedy:
(opět)

$$\frac{d}{dt} f(X(t)) = \nabla f(X(t)) \cdot X'(t) = \frac{1}{\|X(t)\|} (X(t) \cdot X'(t))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}} \left(x(t)x'(t) + y(t).y'(t) + z(t).z'(t)\right)$$

(za našich předpokladů)

a dále, umíme-li derivovat složenou funkci, kde vnější funkce je funkce n-proměnných a vnitřní funkce je funkce jedné proměnné, umíme i parciální derivace funkce (neboť zde se „nedá" jen jedna proměnná" složka bodu a ostatní jsou „konstantní" – tedy „derivujeme jen funkci, popsanou shora".

Věta (o derivaci složené funkce více proměnných).

Nechme: $f : \mathcal{U}(Y_0) \subset R^n \to R$ $\quad (f(Y) = f(y_1, y_2, \ldots y_n))$

$\varphi : \mathcal{U}(X_0) \subset R^m \to R^n$, $\quad \varphi(X_0) = Y_0$ a

$\varphi(\mathcal{U}(X_0)) \subset \mathcal{U}(Y_0)$

a označme $g(X) = f(\varphi(X)) = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \varphi_2(x_1, \ldots, x_m), \ldots \varphi_n(x_1, \ldots x_m))$.

Pak je-li 1) f diferencovatelná v bodě Y_0 (nejčastěji, když $f \in C^1(\mathcal{U}(Y_0))$)

2) $\exists \; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(X_0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}(X_0), \ldots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(X_0) \right)$,

pak existuje

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_0) = \nabla f(\varphi(X_0)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X_0)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(X_0)$$

(tj. opět „lidově" – derivace složené funkce je „derivace vnější fce" $\bullet$ derivace vnitřní fce ($\bullet$ – skalární součin)

(a v podstatě součet všech $\frac{\partial f}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$", $k = 1, 2, \ldots, n$

– zase „známý" vzorec ($n \times$ uplatněný zde))

Příklad (technický) (nebude konkrétní zadaná, jde o „řetízkové pravidlo")

1) $f(u,v)$ – obecná, $f \in C^{(1)}(R^2)$

2) $u(x,y) = x^2y$, $v(x,y) = \frac{x}{y}$

$$\Rightarrow g(x,y) = f\left(x^2y, \frac{x}{y}\right)$$

$$D_g = \{[x,y];\ y \neq 0\}$$

Za předpokladu $f \in C^{(1)}(R^2)$ má $g(x,y)$ parciální derivace v D_g:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$$

a analogicky opět užijeme „řetízkové" pravidlo:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot x^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

A zkusme parciální derivace 2. řádu (předpokládejme $f \in C^2(R^2)$):

Zde se vyžaduje hodně některé zobecnění „pravidla drátového", které občas pomohlo „méně" pokročilým při začátku práce s vzorcem pro derivování složených funkcí v MA1.

„Pomůcka" zde:

$$\text{„}\frac{\partial}{\partial x}(\quad) = \frac{\partial(\quad)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\quad)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\text{"} \quad \text{a podobně}$$

$$\text{„}\frac{\partial}{\partial y}(\quad) = \frac{\partial(\quad)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial(\quad)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

(tj. „zůstává" stejný gradient $\left(\frac{\partial(\quad)}{\partial u}, \frac{\partial(\quad)}{\partial v}\right)$, „mění" se derivace vnitřních funkcí – „podle x, pak podle y)

Tedy:

zde derivujeme „součin"

$$\underline{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right) =$$

$$= 2y\,\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + 2xy\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\right) + \frac{1}{y}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\right) =$$

(viz „poznámka")

$$= 2y\,\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + 2xy\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right] +$$

$$+ \frac{1}{y}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right] =$$

$$= \underline{2y\,\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + 2xy\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right] +}$$

$$\underline{+ \frac{1}{y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right]}$$

Asi je „trošku" složité v tom výpočtu „se vyznat", ale zkuste to – podaří se to!

<u>A teď už „rychleji"</u> (a zkuste si to projít „krok po kroku")

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right)$$

$$= 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + 2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right) +$$

$$+\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)$$

a $\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)$ (zde zaměnitelnost), a $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ zkuste sami!

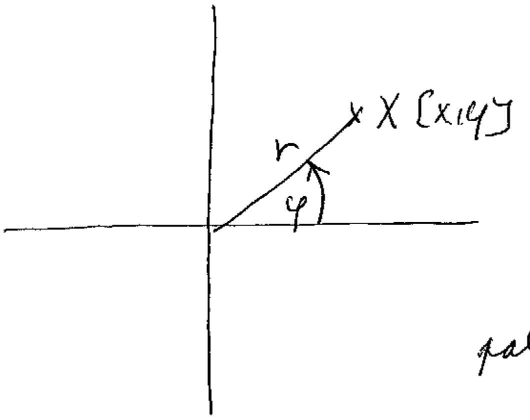
<u>A příklad, kde se řetízkové pravidlo „uplatní":</u>

a) Máme řešit diferenciální rovnici (t.zv. parciální dif. rovnici)

$$(*) \qquad \underline{x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0} \qquad - \quad ?\ f(x,y) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$$

Pro nás je jistě taková rovnice „záhadou", ale „autoři" vědí, že řešení závisí jen na vzdálenosti bodu (x,y) od počátku (tak „vznikl" model v podobě dif. rovnice)

A pro takovouto situaci se „hodí" jiné souřadnice, než na které jste „zvyklí", tj. kartézské – i pro nás budou (u vícenásobných integrálů) <u>t.zv. souřadnice polární</u> užitečné.



polohu bodu $X \neq [0,0]$ udává

1) vzdálenost bodu X od počátku O: $\underline{\underline{r}} > 0$
2) úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ který svírá „spojnice" O a X s kladnou poloosou x

pak: $\quad x = r\cos\varphi \quad (= x(r,\varphi)) \quad , r \in (0, +\infty)$

$\qquad\ \ y = r\sin\varphi \quad (= y(r,\varphi)) \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi)$

<u>Pak hledáme místo původní funkce $f(x,y)$ funkci</u>
<u>$\Phi(r,\varphi)$ tak, že $\Phi(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$</u> $\quad (*)$

a transformace rovnice (*) vlastně znamená „vyjádřit (nahradit) $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ pomocí $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$":

A zde „užijeme" řetízkové pravidlo, pro derivování složené funkce v (*): $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$:

(předpoklady jsou „dodatečné")

Je-li $\phi(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, pak (píšeme „stručněji")

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\varphi \\ \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

soustava rovnic pro $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ (řešením dostaneme „náhrady" těchto derivací)

determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0 \text{ (pro } r>0),$$ tedy soustava má

právě 1 řešení pro každý bod $(r,\varphi) \in (0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi)$, a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\cos\varphi$$

a dosazením do rovnice (*) dostaneme:

$$r\cos\varphi\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\cos\varphi\right) - r\sin\varphi\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) = 0$$

tj. $$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0,$$ tedy

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(r,\varphi) = 0 \Rightarrow \phi(r,\varphi) = \phi(r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

tedy (opět ve kartézských souřadnicích) – řešení rovnice (*) je

$$\underline{f(x,y) = \phi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}, \quad \phi \in C^1(0,+\infty))$$

$x^2+y^2>0$, tj.

$(x,y) \in R^2 \setminus \{[0,0]\}$

b) <u>Vlnová rovnice v jedné dimensi</u>

(je to i rovnice kmitů - příčných - nekonečně dlouhé struny)

Hledáme funkci $u = u(t,x)$, $x \in R$, $t \geq 0$ tak, aby $(u \in C^2(R \times \langle 0,+\infty)))$

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \ a > 0$$

a $\quad u(0,x) = \varphi(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) \ , \ x \in R \quad (**)$

<u>(t.zv. počáteční úloha)</u>

Opět se podaří rovnici (*) vyřešit (a tedy pak i počáteční úlohu) vhodnou transformací souřadnic - zde je návod z fyziky: výchylka v bodě $\underline{x}$ se šíří oběma směry rychlostí $\underline{a}$ ($a>0$ je dáno „vlastnostmi" kmitajícího „zařízení")

Transformace souřadnic: $\underline{\xi = x - at, \ \eta = x + at}$

a funkce hledaná $u(t,x)$ je „transformována" v hledanou funkci $U(\xi,\eta)$ - přičemž je

$$\underline{u(t,x) = U(x-at, x+at)} \ , \ U \in C^2(R^2)$$

a pak (užitím „řetízkového" pravidla):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi}(x-at,x+at)(-a) + \frac{\partial U}{\partial \eta}(x-at,x+at) \cdot a$$

a $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(x-at,x+at)(-a)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(-"-)(-a) \cdot a + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(-"-) \cdot a^2$$

a $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}(x-at,x+at) + \frac{\partial U}{\partial \eta}(x-at,x+at) \quad a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(x-at,x+at) + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(-"-) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}(-"-)$$

(označuji $(-"-)$ místo $(x-at,x+at)$ v derivacích U)

a dosadíme-li derivace do rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,,$$

dostáváme: (vynecháváme zde (ξ,η) v $U(\xi,\eta)$)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} a^2 - 2a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) = 0, \text{ tj.}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta) = 0}$$

a odtud: $\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)(\xi,\eta) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\eta)$ je konstantní vzhledem k proměnné η,

tj. $\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\eta) = f(\xi)$ a pak $\underline{U(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)}$,

($F' = f$, $G(\eta)$ je konstanta „vzhledem" ke ξ)

a tedy máme: $\underline{u(t,x) = F(x-at) + G(x+at)}$, $x \in R, t \geq 0$

a počáteční podmínky „dají":

$$u(0,x) = \varphi(x): \quad F(x) + G(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x): \quad \underline{-aF'(x) + aG'(x) = \psi(x)} \qquad (2)$$

a derivací (1): $\quad F'(x) + G'(x) = \varphi'(x) \qquad (1')$

a řešením soustavy $(1'),(2)$ dostaneme:

$$G'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) + \frac{1}{a}\psi(x)\right) \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \frac{1}{a}\Psi(x)\right)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) - \frac{1}{a}\psi(x)\right) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) - \frac{1}{a}\Psi(x)\right)$$

$$(\Psi'(x) = \psi(x))$$

Pak řešení počáteční úlohy pro vlnovou rovnici ((*),(**))

je $$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\left(\Psi(x+at)-\Psi(x-at)\right)\right],$$

tj. $$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\,d\tau\right],$$

$x\in R$, $t\geq 0$;

- <u>D'Alembertův vzorec</u> – „slavný" v matematice – v teorii parciálních diferenciálních rovnic

(ukazuje, jak je hodnota $u(t,x)$ v čase t v „místě" x ovlivněna počátečními podmínkami – počáteční výchylkou v bodech $x-at$, $x+at$ struny a počáteční rychlostí kmitů v celém intervalu $\langle x-at, x+at\rangle$

D'Alembert Jean le Rond (1717–1783) – význačný francouzský matematik, fyzik, filosof, v matematice se zabýval matematickou analýzou.

A na závěr – ještě jednou uvážíme užitečné pravidlo – ukážeme t. zv. <u>„invarianci"</u> totálního diferenciálu funkce – termín často užívaný i v aplikacích.

Invariace totálního diferenciálu

Mějme funkci $f \in C^1(\mathcal{U}(Y))$, $\mathcal{U}(Y) \subset R^n$ $(f(Y) = f(y_1, y_2, \dots y_n))$

Totální diferenciál $\quad df(Y)(dY) = \nabla f(Y) \cdot dY = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}(Y)\, dy_i$.

A nyní diferenciál složené funkce

$$\underline{g(X) = f(\varphi(X))},$$

kde $\varphi(X) = (\varphi_1(x_1, \dots x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots x_m))$, $\varphi_i \in C^1(\mathcal{U}(X))$,
a $\varphi(\mathcal{U}(X)) \subset \mathcal{U}(Y)$;

pak
$$dg(X) = \nabla g(X) \cdot dX = \nabla f(\varphi(X)) \cdot dX =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(X)\, dx_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right) dx_i =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\, dx_i =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X)) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\, dx_i \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X)) \cdot d\varphi_k(x) = \nabla f(\varphi(X)) \cdot d\varphi(X)$$

(„$\cdot$" - skalární součin)

(kde jsme označili $d\varphi(X) = (d\varphi_1(X), d\varphi_2(X), \dots, d\varphi_n(X))$)

Tedy, $\underline{df(\varphi(X)) = \nabla f(\varphi(X)) \cdot d\varphi(X)}$

(opět „stejný" vzorec „$df(Y) = \nabla f(Y) \cdot dY$")